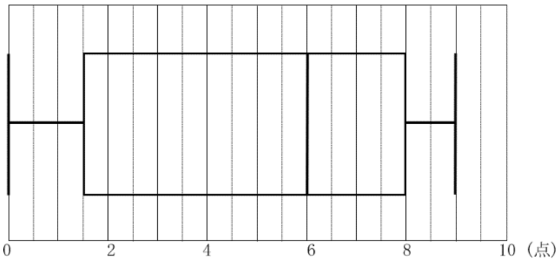
＝＝＝

【解答】

$\boxed{1}$　（１）$5-5\sqrt{30}$　（２）2，-1（３）5（４）$-8 \leqq xy^2-2x \leqq 8$

$\boxed{2}$　（１）　右図



（２）（解答例は，解説をご参照ください。）

$\boxed{3}$　（１）$a=\dfrac{1}{4}$，$b=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　（２）　$(-2\sqrt{5},\ 5)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$

（３）S＞T（記述の解答例は，解説をご参照ください。）

$\boxed{4}$　（１）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$　（２）$\dfrac{23}{45}a^3$（３）$\dfrac{a}{7}$

$\boxed{5}$　（１）$\dfrac{3}{32}$（２）① 10，12 ② 10

＝＝＝

【配点】

$\boxed{1}$　　各６点　小計 24 点

$\boxed{2}$　　各７点　小計 14 点

$\boxed{3}$　（１）６点　（２）・（３）７点　小計 20 点

$\boxed{4}$　　各 ７点　小計 21 点

$\boxed{5}$　　各 ７点　小計 21 点

合計 100 点

＝＝＝

【解説】

1　小問集合

（１）　$(2\sqrt{5}+\sqrt{6})(\sqrt{5}-2\sqrt{6})-(2+\sqrt{5}-\sqrt{6})(2-\sqrt{5}+\sqrt{6})$

$=(2\sqrt{5}^2-3\sqrt{30}-2\sqrt{6}^2)-\{2+(\sqrt{5}-\sqrt{6})\}\{2-(\sqrt{5}-\sqrt{6})\}$

$=(10-3\sqrt{30}-12)-\{4-(\sqrt{5}-\sqrt{6})^2\}$

$=(-2-3\sqrt{30})-\{4-(11-2\sqrt{30})\}$

$=-2-3\sqrt{30}-4+11-2\sqrt{30}$

$=\mathbf{5-5\sqrt{30}}$

（２）$a+\dfrac{1}{b}=b+1$ より　$ab+1=b^2+b$　また，$b+\dfrac{1}{a}=a+1$ より　$ab+1=a^2+a$

ゆえに　$b^2+b=a^2+a$　移項して　$a^2-b^2+a-b=0$

左辺を因数分解して　$(a-b)(a+b+1)=0$

よって　$a=b$ または $a+b=-1$

$a=b$ のとき，$a+\dfrac{1}{b}=b+1=a+1$ より　$\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a}=1$

よって　$a=b=1$，このとき $a+b=2$

以上より，$a+b=\mathbf{2，-1}$

（３）　a，b は以下の等式を満たす（$x^2-x-1=0$ を変形すればよい）。

$a+1=a^2$，$a^2+1=a+2$，$b+1=b^2$，$b^2+1=b+2$

よって $(a+1)(a^2+1)(b+1)(b^2+1)=a^2b^2(a+2)(b+2)$

２次方程式 $x^2-x-1=0$ を解くと $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ である。どちらを a とおいても a^2b^2，$(a+2)(b+2)$ の値は変わらない。$a^2b^2=(ab)^2$，$ab=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\times\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\dfrac{1-5}{4}=-1$ より $a^2b^2=1$

$(a+2)(b+2)=\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\times\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right)=\dfrac{25-5}{4}=5$

ゆえに，$(a+1)(a^2+1)(b+1)(b^2+1)=a^2b^2(a+2)(b+2)$

$=1\times5$

$=\mathbf{5}$

（４）　$xy^2-2x=x(y^2-2)$ である。$-1\leqq y\leqq2$ のとき，$-2\leqq y^2-2\leqq2$（$y=0$ のとき，$y^2-2=-2$）となる。
$-4\leqq x\leqq3$ であるから，$x=-4$，$y^2-2=-2$ のとき，xy^2-2x は最大となり（$xy^2-2x=8$），$x=-4$，　$y^2-2=2$ のとき，xy^2-2x は最小となる（$xy^2-2x=-8$）。よって，$\mathbf{-8\leqq xy^2-2x\leqq8}$ が求める範囲である。

2　中間集合

（１）　データの値を小さいほうから順に a, b, c, d, e, f, g, h $(a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq f \leq g \leq h)$ とする。

条件から $h=9$，中央値が 6 であることから $e \geq 6$。

$g=9$ のとき，8 のみが最頻値になることに矛盾するため $g=8$。したがって $f=8$ 。

$e=6$ のとき $e=d=6$ となり，これも 8 のみが最頻値になることに矛盾するため $e=7$，8。

(i) $e=7$ のとき $d=5$

平均値が 5 より，$a+b+c+5+7+8+8+9=5\times8$ であるから $a+b+c=3$ 。

8 が最頻値となるから，a, b, c はすべて異なる。0，1，2，3，4 の中から和が 3 となるように相異なる 3 つを選び，小さいほうから順に a, b, c とすればよい。

$$(a,\ b,\ c)=(0,\ 1,\ 2)$$

(i) $e=8$ のとき $d=4$

平均値が 5 より，$a+b+c+4+8+8+8+9=5\times8$ であるから $a+b+c=3$。

8 が最頻値となるから，$a=b=c$ ではない。0，1，2，3，4 の中から少なくとも 1 つ異なる数字を含み，和が 3 となるように 3 つの数字を選ぶ。このとき，小さいほうから順に a, b, c とすればよい。

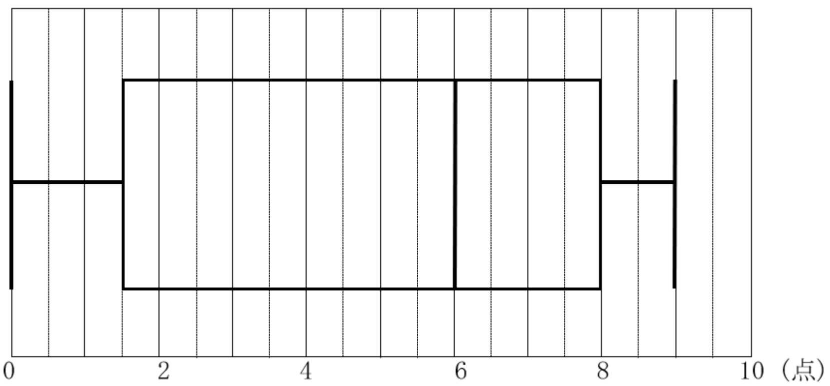
$$(a,\ b,\ c)=(0,\ 0,\ 3),\ (0,\ 1,\ 2)$$

よって，　$(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h)=(0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 8,\ 8,\ 9)$

$(0,\ 0,\ 3,\ 4,\ 8,\ 8,\ 8,\ 9)$

$(0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 8,\ 8,\ 9)$

これらを箱ひげ図に表すが，どのデータも最小値 0，第 1 四分位数 1.5，中央値 6，第 3 四分位数 8，最大値 9 であるから，下の箱ひげ図のみをかけばよい。



（２）まず，円の中心 O を作図する。

① 円周上に P と異なる 2 点 A，B をとり，線分 AP と線分 BP の垂直二等分線を引く。
これらの交点が円 C の中心 O である。

② 直径 PQ を引く。

③ 半径 QO の垂直二等分線を引き，円との交点を C，D とする。

④ 線分 PC，PD を引く。

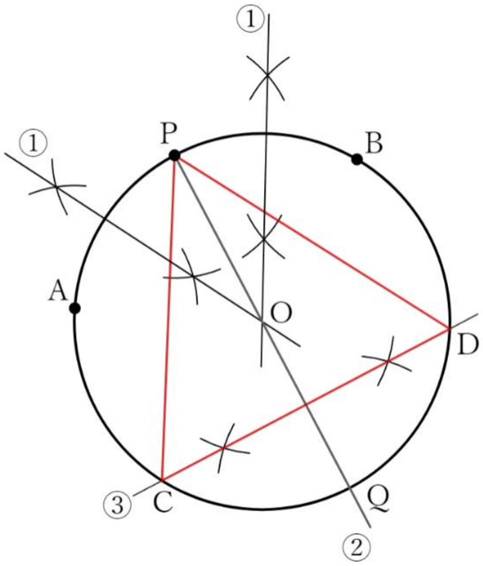
(証明)

CQ=CO=QO より，△COQ は正三角形だから∠COQ＝60°

円周角の定理より∠CPQ＝30°，同様に∠DPQ＝30° だから∠CPD＝60°

これと CP=PD であることから，△PCD は正三角形である。(証明終わり)

【解答例】



3　放物線と図形

（１） ②とy軸との交点を U とする。

直線②は∠QPO の二等分線だから，QU：UO＝2：3＝PQ：PO

$PQ^2+QO^2=OP^2$ より

$$\left(-\frac{2}{b}\right)^2+5^2=\left(-\frac{3}{b}\right)^2$$

$$b^2=\frac{1}{5}$$

$$b<0 \text{より} \quad b=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

点 $P\left(-2\sqrt{5},\ 5\right)$ となるので，

$$5=a\times\left(-2\sqrt{5}\right)^2$$

$$a=\frac{1}{4}$$

答え $\boldsymbol{a=\frac{1}{4},\ b=-\frac{\sqrt{5}}{5}}$

（２） 問題文の条件より OP は円の直径になるから，直線②は円と２つの交点をもつ。

１つは点Ｐの座標$(-2\sqrt{5},\ 5)$

ここで，O から②へ垂線を引くと，その直線は$y=\sqrt{5}x$となる。

この直線と②との交点が，円と②との交点になる。

よって，$\sqrt{5}x=-\frac{\sqrt{5}}{5}x+3$

これを解くと，$x=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$y=\frac{5}{2}$　よって，もう一つの座標は$(-\frac{\sqrt{5}}{2},\ \frac{5}{2})$

答え　$(-2\sqrt{5},\ 5)$，$(-\frac{\sqrt{5}}{2},\ \frac{5}{2})$

（３） ②とy軸との交点を U とする。

QU：UO＝2：3＝△PQU：△PUO　よって，△PQU＜△PUO …①

また，△ORQ は二等辺三角形であり，点 R から引いた垂線によって二等分される。

よって，△QRU＜△URO …②

弧 QR，線分 QR に囲まれた面積と弧 OR，線分 OR に囲まれた面積は等しいため，△PQR と△PRO の大小を比較すればよい。

△PQR＝△PQU＋△QRU，△PRO＝△PUO＋△URO

①，②より，△PQR＜△PRO　よって，S＞T

4　立体図形

（１） 断面は図１の斜線部分である。（M_1，M_2，M_5，M_6，M_4，M_3は各辺の中点。）切り分けられた二つの立体は合同なので，頂点 F を含む立体について考える。この立体を切断面が底面になるように置いたときの高さは，点 F から切断面におろした垂線の長さに等しい。このとき，垂線は面 BDHF 内にあり，求める線分は FO である（図２）。△FOR で三平方の定理を用いると，$FO^2=\left(\frac{1}{2}a\right)^2+\left(\sqrt{2}a\times\frac{1}{2}\right)^2$。よって，$FO=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}a}$。

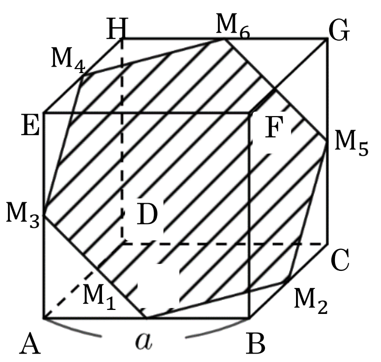


図１

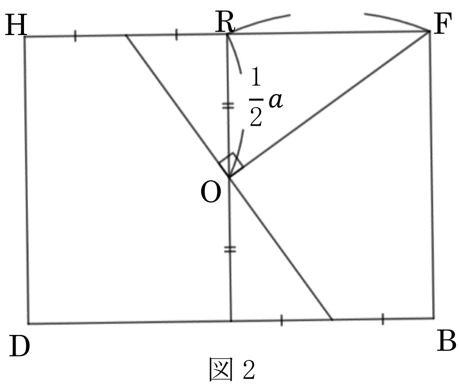


図２

（２） 断面は図３の斜線部分である。図４は，正四角錐の切断部分を拡大したものである。切断後の点 D を含む立体のうち，立方体 ABCD－EFGH の部分(立体 $AM_1M_2CM_5M_6HM_4M_3$)は，ABCD－EFGH の半分の体積

であるから$\frac{1}{2}a^3$。三角錐 $\mathrm{HM_4M_6}$—L の体積を求める。

図 5 において，△ILH と△OLP が相似であることより，IL：LO=IH：OP=$\frac{1}{2}a$：$\left(\frac{8}{7}a+\frac{1}{2}a\right)=7：23$。また，IN：NO=1：1 であるから，IL：LN= 7：8。三角錐 $\mathrm{HM_4M_6}$—I の体積は$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}a\right)^3$であるから，三角錐 $\mathrm{HM_4M_6}$—L の体積は$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}a\right)^3\times\frac{8}{7+8}=\frac{1}{90}a^3$である。

よって，求める体積は$\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{90}a^3=\boldsymbol{\frac{23}{45}a^3}$。

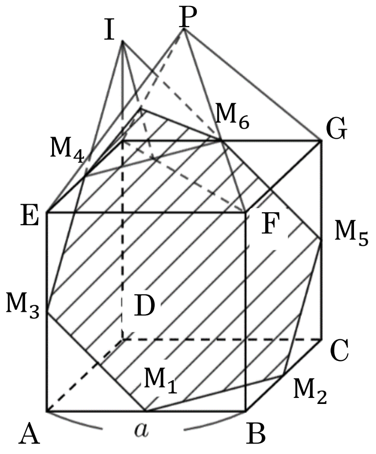


図 3

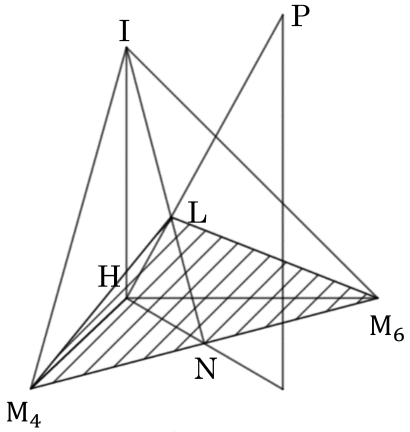


図 4

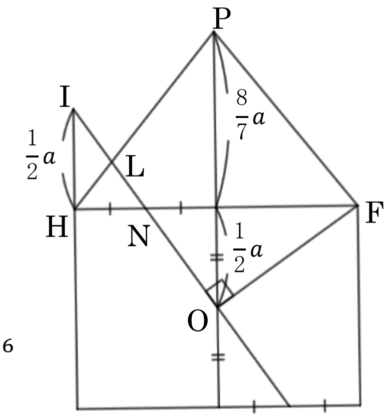


図 5

（3） 断面は図 6（これ以降の番号の図は，すべて次ページに掲載）の斜線部分である。正四角錐 EFGH—Q の高さをkaとおく。切断後の点 D を含む立体を，断面が底面になるようにおく。また，これは（1）の水槽に三角錐 $\mathrm{HM_4M_6}$—L'を付け加えたものだから，（1）の水槽に入っている水をすべてこの水槽に入れると三角錐 $\mathrm{HM_4M_6}$—L'の体積分，水面が下がる（図７，８，９）。これによって生まれる空洞の空間 I'J'K'—D は三角錐 IJK—D に相似な三角錐である。

（1）での水の深さは$\frac{\sqrt{3}}{2}a$であるから，三角錐 IJK—D と三角錐 I'J'K'—D の相似比は$\frac{\sqrt{3}}{2}a$：$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{5\sqrt{3}}{12}a\right)$ $=6：1$。 体積比はこれの 3 乗であるから 216：1。三角錐 IJK—D の体積は$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}a\right)^3$であるから，三角錐 I'J'K'—D の体積は$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}a\right)^3\times\frac{1}{216}$。

次に三角錐 $\mathrm{HM_4M_6}$—L'の体積をaで表す。△IL'H と△OL'Q が相似であることより，IL'：L'O=IH：OQ= $\frac{1}{2}a$：$\left(ka+\frac{1}{2}a\right)=\frac{1}{2}：(k+\frac{1}{2})$。また，IN：NO＝1：1 であるから，IL'：L'N＝1：k。三角錐 $\mathrm{HM_4M_6}$—I の体積は$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}a\right)^3$であるから，三角錐 $\mathrm{HM_4M_6}$—L'の体積は$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}a\right)^3\times\frac{k}{k+1}$である。①と②が等しいから，$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}a\right)^3\times\frac{1}{216}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}a\right)^3\times\frac{k}{k+1}$。これを解いて$k=\frac{1}{7}$。よって，求める高さは$\boldsymbol{\frac{a}{7}}$。

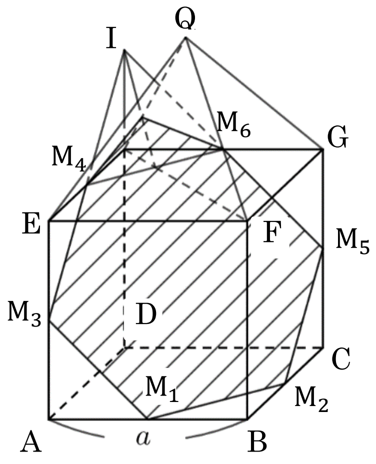


図 6

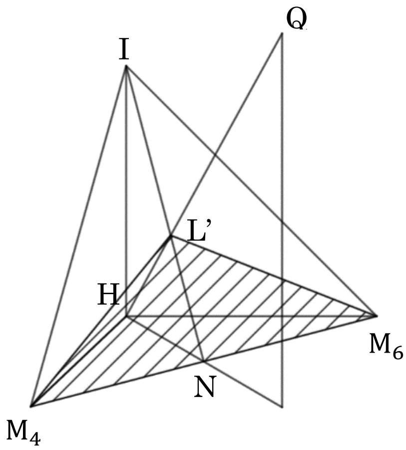


図 7

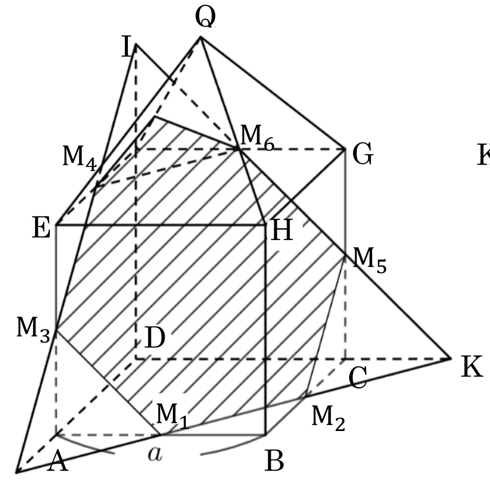


図 8

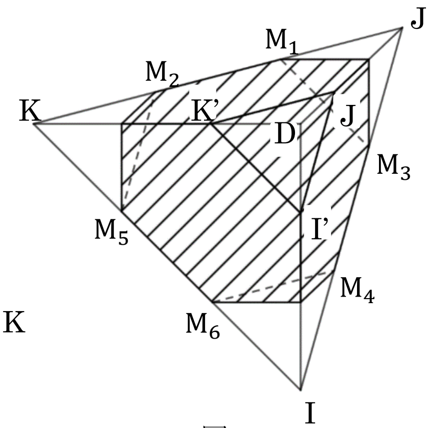


図 9

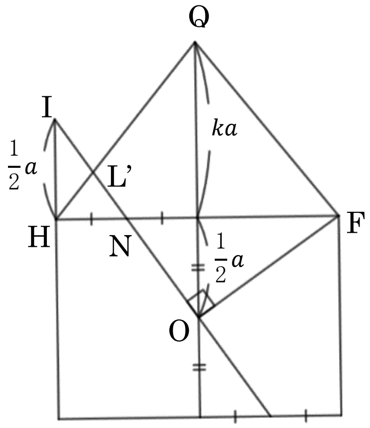


図 10

5 確率

（1）出た目の積が 8 になるとき，その組み合わせとして考えられるのは(1，8)，(2，4)のみであり，(2，4)のみ重複することからこの問題の答えが$\frac{3}{32}$となることが分かる。

（2）

① この問題で考えるべきことは，「出た目の積が 1 または 2 の累乗の形で表されるならば，出た目はそれぞれ 1 または 2 の累乗の形で表されなければならない」ことである。また，各さいころのうち，1 または 2 の累乗が出る確率が高いさいころを 2 つ選ぶことで解が得られることが分かる。それぞれのサイコロについて 1 または 2 の累乗の形が出る確率は次の表のようになる。

正四面体	正六面体	正八面体	正十二面体	正二十面体
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

この表から問題の条件を満たすような組み合わせは正四面体と正六面体，正四面体と正八面体の二つであることから，求める解は，10 と 12 である。

② この問題は①を発展させた問題である。方針としては，地道ではあるかもしれないが，20 以下のそれぞれの素数pについて 1 またはpの累乗の形で表される確率をそれぞれの多面体について求めるのが良いだろう。

以下の表は，各素数pについて各多面体の目に含まれる 1 またはpの累乗で表されるような数の総数を表したものである。

素数p	2	3	5	7	11	13	17	19
正四面体	3	2	1	1	1	1	1	1
正六面体	3	2	2	1	1	1	1	1
正八面体	4	2	2	2	1	1	1	1
正十二面体	4	3	2	2	2	1	1	1
正二十面体	5	3	2	2	2	2	2	2

求める確率は，上の表から正多面体を 2 つ選び，以下の式に代入することで求められる。

$$\frac{(\text{各さいころの 1 または各素数の累乗で表される数の総数の積})-7}{\text{各さいころの面の数の積}}$$

上の式に値を代入することで，問題の条件を満たすさいころの組は正四面体と正六面体のみであることが分かるため，求める解は，10 である。